

一类全局的曲线细分

朱利丰^{1,2)}, 汪国平^{1,2)*}

¹⁾(北京大学机器感知与智能教育部重点实验室 北京 100871)

²⁾(北京大学计算机系图形与交互技术实验室 北京 100871)

(wgp@pku.edu.cn)

摘要: 传统细分曲线由于只使用了局部信息来更新顶点位置, 在控制顶点分布不均匀时曲率分布波动较大. 为提高细分曲线质量, 提出一类全局性的细分方法. 将曲线的每一次细分分解成差分计算、插值、重建等一些简单的步骤; 通过修改其中的重建步骤, 将曲线重建的顶点放宽至所有控制顶点, 配合扩大的模板和改进的插值以进一步改进曲线的几何质量. 最后通过实验数据验证了此类全局性细分曲线在光滑性和曲率分布上的良好性质.

关键词: 细分曲线; 四点法细分; 高阶差分; 曲率

中图法分类号: TP391.41; TP391.72

A Class of Global Subdivision for Curves

Zhu Lifeng^{1,2)} and Wang Guoping^{1,2)*}

¹⁾(The Key Laboratory of Machine perception and intelligent, Ministry of Education, Beijing 100871)

²⁾(Graphics and Interactive Laboratory, Department of Computer Science, Peking University, Beijing 100871)

Abstract: The quality of traditional subdivision curves are restricted by the local mask of subdivision schemes. Notice that a step of subdivision can be decomposed into a sequence of simple stages—calculating the difference, interpolation and reconstruction. A class of global subdivision curves is proposed by manipulating the reconstruction stage. Through a reconstruction involving all the control vertices, the subdivision turns to be global. An improvement on the smoothness and curvature distribution is proved then. Further improvement can be achieved by employing high-order difference and smoother interpolations. Experiments show that the curvature distribution improves under our new construction for subdivision curves.

Key words: subdivision curves; four-point subdivision; high-order difference; curvature

细分方法通过逐次迭代加密控制顶点生成光滑的自由曲线曲面. 由于其在多分辨率、表示一致性、拓扑任意性等方面的优势, 已成为自由曲线曲面的重要造型手段.

经典的曲线细分方法, 如产生 B 样条曲线的 Lane-Riesenfeld 细分^[1]、插值型的四点法细分^[2]的每一步计算, 常被视为拓扑分裂加上顶点几何更新

2 个步骤. 顶点几何更新一般通过选取适当的邻接区域和模板, 并对邻接区域顶点的几何位置进行加权平均求得. 细分模板的设计通常通过分析细分方法对应的细分矩阵和生成多项式来进行, 在细分曲线的收敛性和光顺性的约束下, 各种细分格式被不断发现.

近年来, 另一条设计细分方法的思路也被广为

收稿日期: 2010-07-08; 修回日期: 2010-08-09. 基金项目: 国家“九七三”重点基础研究发展计划项目(2010CB328002); 国家自然科学基金(90915010, 60925007, 60833007). 朱利丰(1985—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为 CAGD & CG; 汪国平(1964—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 论文通讯作者, 主要研究方向为 CAGD、虚拟现实.

探讨. 通过把细分方法分解为计算差分、插值和重建 3 个简单的步骤, 细分的模板也同样可以被推导出来. 其典型的示例可以参考细分曲面的一些类似推导^[3-4]. Augsdörfer 等^[5]通过分解四点法细分曲线的计算步骤对每一步进行了一些变化和改进, 提出了一系列的四点法插值曲线的变体, 同时使用传统的分析手段分析了这些变体的收敛性和连续性. 受此启发, 本文以四点法细分曲线为例, 进一步改变其中的重建步骤, 提出了一类全局性的逼近型细分曲线生成方法. 理论证明和实验数据表明, 放弃传统细分曲线的局部性可以生成具有更高质量的自由曲线.

经典的四点法曲线是一种线性、静态的细分方法. 已有的一些其他四点法的变体大致可以分为将线性 (linear) 的模板改为非线性^[6-7], 将静态 (stationary) 的模板改为非静态^[8], 将全局一致 (uniform) 的模板改为几何敏感的模板^[9]等. 本文的思路是将局部的细分模板扩至全局, 同时放松四点法的插值性需求, 从而推导出了一类新型的全局性逼近型曲线细分方法. 现有的利用全局性来提高细分曲线质量的一些主要工作源于 Schneider 等^[10] 和 Kobbelt^[11], 前者给出了一个全局薄板能量最低的插值型细分, 后者通过重建线性插值的曲率得到离散的 Clothoid 样条曲线. 与文献[10-11]工作相比, 本文给出的全局细分框架在计算上更为便捷, 文中将在理论和计算上对其展开讨论.

1 预备知识

记控制多边形为 $P^{(0)} = \{p_j^{(0)}\}$, k 次细分后的曲线记为 $P^{(k)} = \{p_j^{(k)}\}$, 记细分极限曲线在均匀参数化下的参数表述为 $c(u)$; 称细分新插入的顶点为奇顶点, 原来的顶点为偶顶点. 四点法细分可以表示为

$$\begin{cases} p_{2j}^{(k+1)} = p_j^{(k)} \\ p_{2j+1}^{(k+1)} = \left(\frac{1}{2} + \omega\right)(p_j^{(k)} + p_{j+1}^{(k)}) - \omega(p_{j-1}^{(k)} + p_{j+2}^{(k)}) \end{cases} \quad (1)$$

其中张力参数 ω 选取为 $1/16$ 时, 在均匀参数化下 $P^{(k)}$ 收敛到的极限曲线可以保持三次曲线, 拥有最好的连续性. 除了用保持三次曲线的方法可以导出 $\omega = 1/16$ 这一参数选取外, Floater 等^[12]提出了一套通过将每一次细分分解为 3 个子步骤的方法来构建这一模板, 在每一次细分时, 由于四点法是插值型细分, 偶顶点位置保持不变, 实际上每一步所需求解的只有奇顶点 $p_{2j+1}^{(k+1)}$. 如图 1 所示, 求奇顶点的方法可以描述如下:

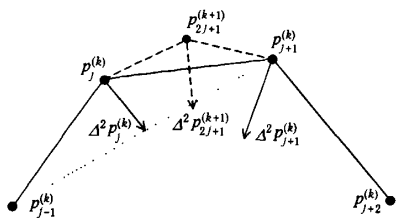


图 1 四点法细分新顶点的构建示意

Step1. 计算差分. 计算第 k 层顶点的二阶差分, 设本层上相邻两点在参数域距离为 1, 则有

$$\begin{cases} \Delta^2 p_j^{(k)} = p_j^{(k)} + p_{j+1}^{(k)} - 2p_j^{(k)} \\ \Delta^2 p_{j+1}^{(k)} = p_{j+1}^{(k)} + p_{j+2}^{(k)} - 2p_{j+1}^{(k)} \end{cases} \quad (2)$$

Step2. 插值. 插值出第 $k+1$ 层上奇顶点 $p_{2j+1}^{(k+1)}$ 的二阶差分

$$\Delta^2 p_{2j+1}^{(k+1)} = \frac{1}{2} (\Delta^2 p_j^{(k)} + \Delta^2 p_{j+1}^{(k)}) \quad (3)$$

Step3. 重建. 根据二阶差分, 在第 $k+1$ 层上重建出奇顶点 $p_{2j+1}^{(k+1)}$ 的位置. 静态的四点法使用均匀参数化, 在一次细分后多边形顶点间的在参数域上距离减半为 0.5, 于是在第 $k+1$ 层上计算二阶差分时有

$$\Delta^2 p_{2j+1}^{(k+1)} = (p_j^{(k+1)} + p_{j+1}^{(k+1)} - 2p_{2j+1}^{(k+1)}) / (0.5)^2,$$

将其代入式(2)(3)以及插值型约束 $p_{2i}^{(k+1)} = p_i^{(k)}$ ($i = j, j+1$), 可得四点法的细分模板

$$p_{2j+1}^{(k+1)} = \frac{9}{16} (p_j^{(k)} + p_{j+1}^{(k)}) - \frac{1}{16} (p_{j-1}^{(k)} + p_{j+2}^{(k)}).$$

2 全局型曲线细分的框架

用第 1 节的 3 步分解来构建细分模板时, 由于约束偶顶点插值过上一层的顶点, 在此约束下, 虽然奇顶点在新的一层中的二阶差分恰是插值算出的二阶差分, 但是偶顶点在新的一层中的二阶差分实际上并不一定等于它在上一层的二阶差分; 因此同一层上的二阶差分不能得到其插值方法所预期的连续性, 将直接影响曲线的质量. 为此, Augsdörfer 等^[5]提出了一套松弛的四点法, 通过放松四点法的插值型约束, 根据偶顶点的二阶差分更新偶顶点的位置, 使细分极限曲线拥有了较好的连续性和曲率分布. 然而重新调整偶顶点的位置后, 又会直接导致奇顶点在此层上的二阶差分不再等于插值算出的二阶差分. 为此, 本文进一步放松细分的局部性约束, 导出一套全局性的曲线细分方法.

设第 k 层有 n_k 个顶点, 为方便叙述, 不妨设细分曲线是闭合曲线. 记 $P^{(k)} = [p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_{n_k}^{(k)}]^T$,

用矩阵形式来表示差分运算,记差分矩阵

$$\mathbf{D}^{(k)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix}_{n_k \times n_k},$$

对细分的重建步骤进行改进,将局部的重建改进为全局的重建.选择保证新的一层所有顶点的二阶差分皆为上一层各顶点二阶差分的插值细化版本,则有

$$4\mathbf{D}^{(k+1)}\mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{(k)}\mathbf{P}^{(k)} \quad (4)$$

其中,系数4由新插入的点落在参数域上的中点产生, $\mathbf{S}$ 表示插值的运算.对于经典的四点法而言, $\mathbf{S}$ 为分段线性插值,可以表示为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}.$$

通过求解线性系统式(4),便可以得到新的一层的细分曲线 $\mathbf{P}^{(k+1)}$,使得其各顶点的二阶差分严格等于上一层各顶点二阶差分的插值版本.

需要说明的是,由于 $\text{rank}(\mathbf{D}^{(k)}) = n_k - 1$,要保证线性系统式(4)存在唯一解,需要给其再加上额外的约束条件.注意到对于任意向量 $\mathbf{t}$,令 $\mathbf{T} = [\mathbf{t}, \mathbf{t}, \cdots, \mathbf{t}]^T$,有 $\mathbf{D}^{(k)}\mathbf{T} = \mathbf{0}$.说明若 $\mathbf{P}^{(k)}$ 满足式(4),那么 $\mathbf{P}^{(k)} + \mathbf{T}$ 也满足式(4),即任意地平移曲线 $\mathbf{P}^{(k)}$ 都满足式(4).要固定住重建出的曲线,需要添加一个额外的约束.本文通过将 $\mathbf{P}^{(k)}$ 的重心固定在控制网格 $\mathbf{P}^{(0)}$ 的重心,即给式(4)添加一个额外的约束

$$\frac{1}{n_k}(1, 1, \cdots, 1)\mathbf{P}^{(k)} = \frac{1}{n_0}(1, 1, \cdots, 1)\mathbf{P}^{(0)} \quad (5)$$

来实现.此时式(4)(5)构成了一个 $(n_k + 1) \times n_k$ 的线性系统 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$,可以验证 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 满秩且可逆;于是通过求解其法方程 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ 的唯一解,得到了唯一的一个原始控制多边形的逼近型细分曲线.

有了上述的推导,可以进一步修改细分的计算差分和插值2个子步骤,配合本文提出的全局性重建,得到一类全局性的细分曲线.具体做法如下:

1) 修改计算差分子步骤中的二阶差分为四阶差分 $\Delta^4 p_j^{(k)} = p_j^{(k)} - 4p_{j-1}^{(k)} + 6p_j^{(k)} - 4p_{j+1}^{(k)} + p_{j+2}^{(k)}$.此时在本文的曲线造型框架下,只需按照四阶差分的

系数修改差分矩阵 $\mathbf{D}$ 的系数即可.也可以使用更高阶的差分格式,本文采用偶数阶的差分格式是为了保持细分曲线模板的对称性,也可以采用奇数阶的差分格式来生成不对称的模板,以达到更高的造型自由度.

2) 修改插值子步骤中的分段线性插值为经典的四点法插值,此时使用插值式(1)来代替式(3),由于四点法生成 C^1 的插值曲线,相比 C^0 的线性插值可以得到更光滑的插值结果.在本文提出的全局性细分曲线框架下,只要修改插值矩阵 $\mathbf{S}$ 中的系数为四点法对应的系数即可;也可使用其他四点法的变形来进行插值.使用非线性的插值手段虽然此时细分的下一层上各顶点不再线性依赖上一层顶点,但是由于只是 $\mathbf{S}$ 变成了非线性算子,差分算子 $\mathbf{D}$ 仍然是线性的.式(4)右侧可以显示算出,所以式(4)仍然是线性方程,依然可以保证稳定的求解.

3 收敛性与光滑性

下面以二阶差分的分段线性插值为例,证明第2节所构建的细分曲线的收敛性.

引理1. 设 $\mathbf{P}$ 是在足够光滑的参数曲线 $c(u)$ 上的均匀采样,且满足 $p_j = c(u_j)$, $u_{j+1} - u_j = h$,则 p_j 处的二阶差分 $\Delta^2 p_j = c''(u_j) + O(h^2)$, $h \rightarrow 0$.

证明. 对 $c(u)$ 在 u_j 处进行泰勒展开有

$$c(u_j + h) = c(u_j) + c'(u_j)h + c''(u_j)h^2/2 + c'''(u_j)h^3/6 + O(h^4) \quad (6)$$

$$c(u_j - h) = c(u_j) - c'(u_j)h + c''(u_j)h^2/2 - c'''(u_j)h^3/6 + O(h^4) \quad (7)$$

将式(6)(7)相加移项得到

$$\Delta^2 p_j = \frac{p_{j-1} + p_{j+1} - 2p_j}{h^2} = \frac{c(u_j - h) + c(u_j + h) - 2c(u_j)}{h^2} = c''(u_j) + O(h^2).$$

证毕.

引理2. 在均匀参数化下,由式(4)确定的第 k 层细分曲线各点处的二阶差分等于细分控制多边形二阶差分进行 k 次插值后的结果.

证明. 设控制多边形有 n_0 个顶点,取参数域为 $[0, n_0 h]$,满足 $p_j^{(0)}$ 对应于参数值为 jh 的点,各顶点在参数域上距离为 h .细分 k 次后,各顶点在参数域上的距离 $h_k = h/2^k$.由式(4)可知

$$\frac{1}{(0.5h_k)^2} \mathbf{D}^{(k+1)} \mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{S} \frac{1}{h_k^2} \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{P}^{(k)};$$

继续代入 $\frac{1}{(0.5h_{k-1})^2} \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{S} \frac{1}{h_{k-1}^2} \mathbf{D}^{(k-1)} \mathbf{P}^{(k-1)}$ 以及 $h_k = h/2^k$, 可得

$$\frac{1}{h_k^2} \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{S}^k \frac{1}{h_0^2} \mathbf{D}^0 \mathbf{P}^0 \quad (8)$$

证毕.

定理 1. 均匀参数化下, 采用二阶差分分段线性插值时, 在适当的约束下, 通过式(4)构建的细分曲线收敛且 C^2 连续.

证明. 先记均匀参数化下式(4)确定的极限曲线为 $c(u)$. 式(8)中, 令 $k \rightarrow \infty$, 则 $h_k = h/2^k \rightarrow 0$. 根据引理 1, 式(8)左侧收敛于 $c''(u)$. 由于采用分段线性插值, 式(8)右侧最终收敛于一分段线性曲线 $d(u)$, $d(u)$ 的顶点为控制多边形各顶点的二阶差分, 于是, 式(8)在 $k \rightarrow \infty$ 时可以记为

$$c''(u) = d(u) \quad (9)$$

即式(4)构建的细分曲线的极限若存在则是方程(9)的解. 给定适当的初始条件便可以确定出 $c(u)$; 而 $c(u)$ 的二阶导数 $d(u)$ 分段线性连续, 所以 $c(u)$ 至少 C^2 连续.

证毕.

根据上述证明可知, 本文提出的一类全局性逼近细分曲线可以拥有比其插值子步骤的插值方法更高的连续性. 若在插值子步骤采用式(1)插值, 式(9)中 $d(u)$ 达到 C^1 连续, 于是对应的极限曲线 $c(u)$ 可以达到 C^3 的连续性.

4 实验结果与分析

下面给出本文提出的全局性细分曲线的一些实例. 除了第 3 节中分析的连续性外, 为了更好地反映出这类全局性细分曲线的质量, 还列出了参数域上的曲率分布图, 并同经典的四点法和局部松弛的四点法^[5] (松弛系数取为 0.75) 进行比较. 由于细分过程中曲线点数呈几何级数增长, 所以一般细分 6~7 次便可足够好的逼近极限曲线. 参考文献[9], 计算曲线的离散曲率本文使用

$$\kappa_j = \left| \frac{(p_j - p_{j-1}) \times (p_{j+1} - p_j)}{\|p_j - p_{j-1}\| \|p_{j+1} - p_j\| \|p_{j-1} - p_{j+1}\|} \right|.$$

如图 2 所示, 控制多边取为正方形, 各点分布均匀. 由于采用逼近形细分, 极限曲线尺度上比控制网格减小了, 本文方法比局部松弛的四点法曲率跨度会稍大, 但是在曲率分布和连续性上表现较好.

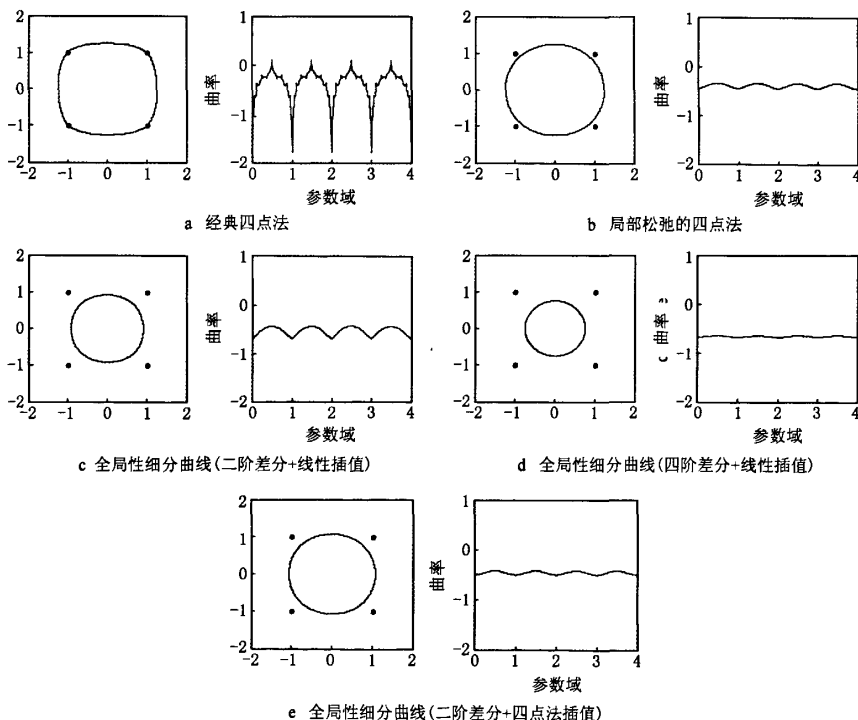


图 2 均匀采样的凸多边形控制多边形细分示例

图 3,4 给出了控制多边形非凸多边形时的一个示例. 由图 4 可见,在全局性细分下,曲率分布较平坦. 图 5 所示为非均匀采样下的情形,图中左中右分别是细分曲线、曲率分布和挠率分布. 经典四点法会

出现自交的问题,而局部松弛的四点法在点集紧凑处也会有较大的曲率跳跃. 相比而言,全局性的细分曲率分布改进明显,同时也保持了原有曲线的曲率分布特征.

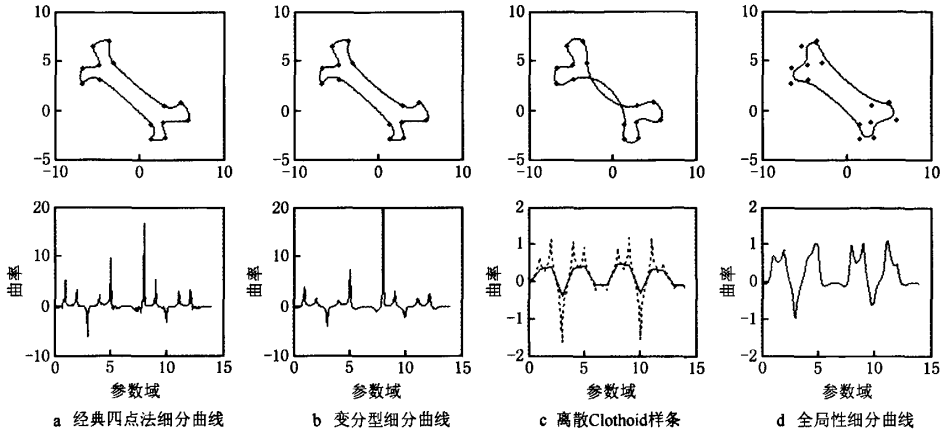


图 3 同已有全局性细分曲线工作的效果比较

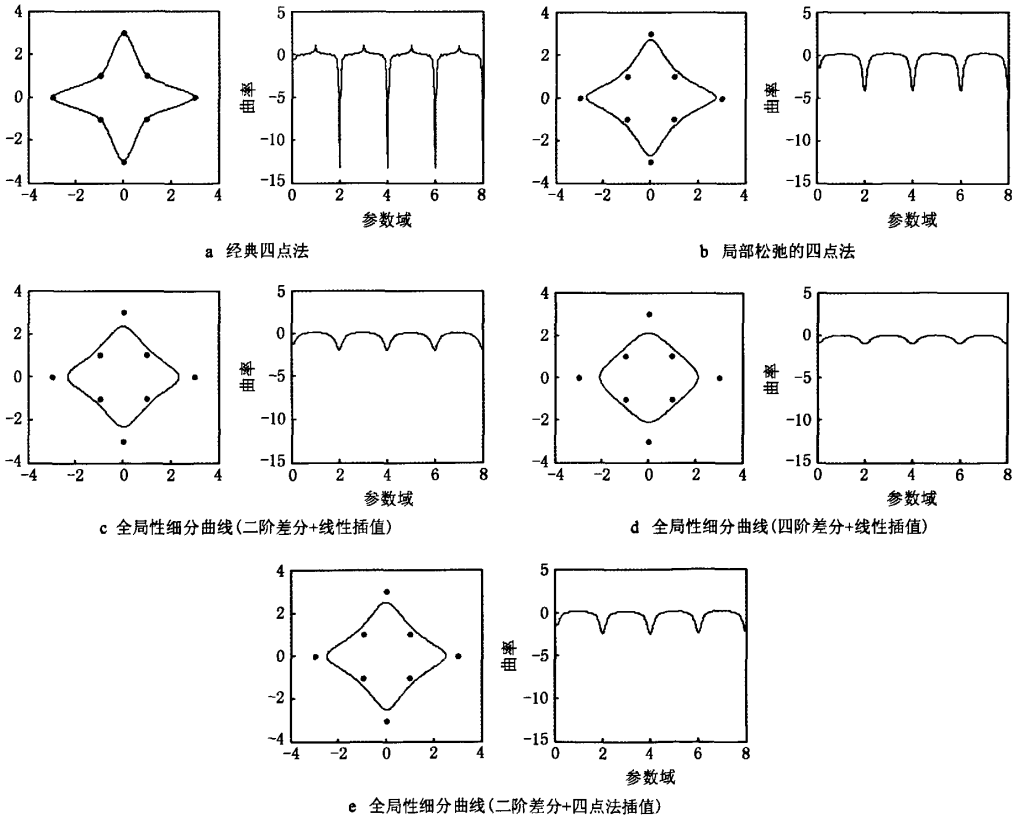


图 4 均匀采样的凹多边形控制多边形细分示例

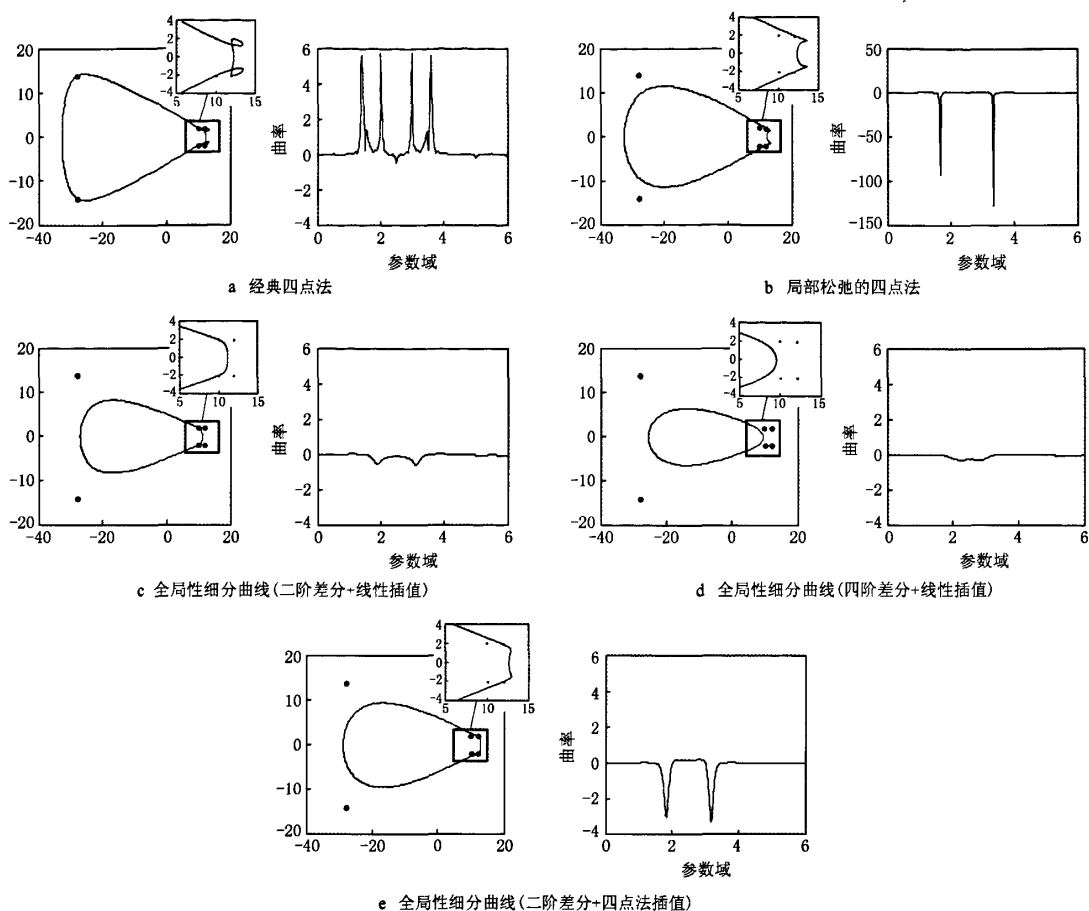


图 5 非均匀的控制多边形细分示例

在实验中我们发现,虽然这类全局性细分都能改观细分曲线的质量,但是使用高阶差分,求解方程式(4)会在数值运算上带来不稳定性且曲线形状同控制多边形相比改变较大,权衡利弊使用低阶差分效果更好。

图 6 所示为一个空间开曲线的实例,图中由左向右分别为细分曲线、曲率分布和挠率分布。对于开曲线情形,细分时重复边界点、计算差分时用过边界点的边作为边界点的差分;采用同样的细分框架,得到全局性细分曲线。由于数值不稳定性的缺点,此例中未实现使用四阶差分的全局性细分。图 6 同时还示例了三维曲线的应用情形,除了曲率图,本文还列出了空间曲线的挠率分布来表征曲线的几何质量。

我们还将本文方法同现有的全局性细分工作^[10-11]进行了比较。其中,Kobbelt 的变分型细分方法^[11]需要在每一次细分时计算一个当前细分多边形规模的线性方程组,这样细分 k 步则需要求解 k

遍线性方程组,计算成本较大;Schneider 等^[10]的离散 Clothoid 样条要根据曲线的曲率标量重建出曲线,这是一个非线性的问题,需要迭代求解且存在数值稳定性问题。注意到本文所提出的全局性细分曲线 $P^{(k)}$ 满足式(6),即求解 $P^{(k)}$ 实际上只需要求解一遍线性方程组。由此可知,在计算上本文方法更为便捷。

在效果上,同样分析曲线的曲率分布,图 3 给出了一组数据的比较。为了公平地比较曲率分布,对于变分型细分曲线我们实现了最小化二阶差分能量的版本(如图 3 b 所示),对于本文方法实现了二阶差分的线性插值版本。离散 Clothoid 样条曲线涉及到求解非线性系统,我们给出了其理想的曲率分布(如图 3 c 下图蓝色实线所示)及其用数值计算的近似方法所得到的曲率分布(如图 3 c 下图黑色虚线所示)。较经典四点法曲线(图 3 a),变分型细分曲线(图 3 b)曲率分布的高频部分更少,但是由于插

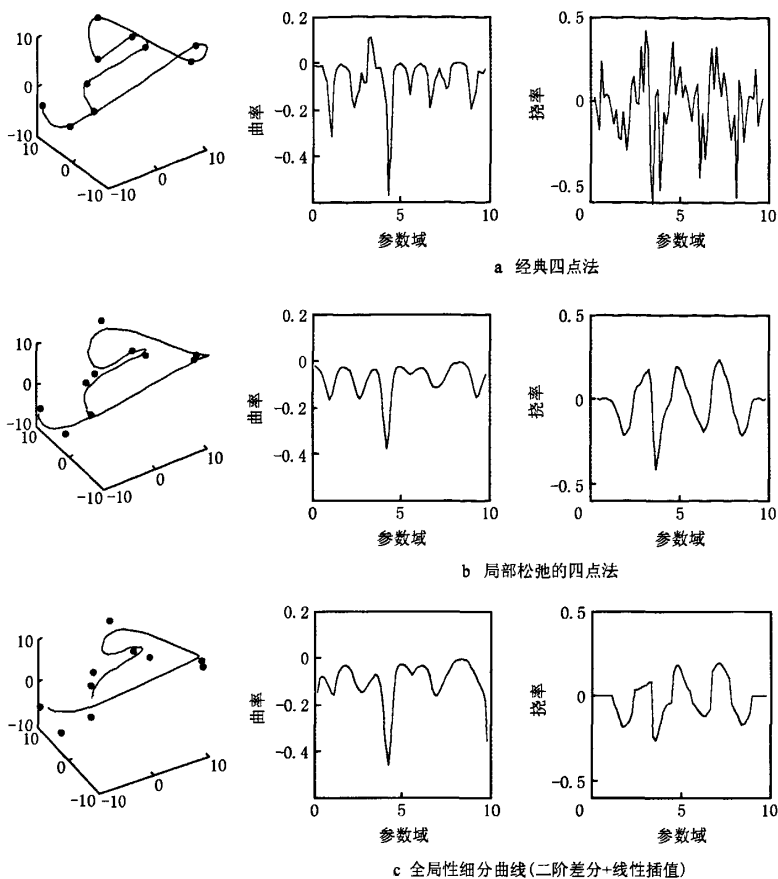


图 6 空间开曲线示例

值性的约束,相比本文方法曲率分布的波动仍然很大.离散 Clothoid 样条的理想曲率分布呈分段线性分布,较为理想,但是这样的曲率分布约束可能会使曲线在空间域上的形状偏离控制网格更大,如图 3 c 上图所示.相比离散 Clothoid 样条,本文方法在曲率分布上优势并不明显,但是其形状可控性较好.

5 结论及展望

本文根据四点法的多步骤推导过程提出了一套全局性的逼近型曲线细分方法,并在收敛性和曲线曲率分布上做了相关证明和实验.理论和实验数据都表明,本文提出的全局性曲线细分可以有效地改善细分曲线的质量.通过曲线情形的理论分析和实验上的成功,根据文献[3]中对细分曲面的细分步骤分解,我们有望将此类全局性细分推广到曲面上去,以提供质量更高的细分曲面.

参考文献 (References):

- [1] Lane J M, Riesenfeld R F. A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1980, 2(1): 35-46
- [2] Dyn N, Levin D, Gregory J A. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design [J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(4): 257-268
- [3] Zorin D, Schröder P. A unified framework for primal/dual quadrilateral subdivision schemes [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(5): 429-454
- [4] Oswald P, Schröder P. Composite primal/dual $\sqrt{3}$ -subdivision schemes [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20 (3): 135-164
- [5] Augsdörfer U H, Dodgson N A, Sabin M A. Variations on the four-point subdivision scheme [J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27(1): 78-95

(下转第 84 页)

- [13] Botha C P, Post F H. New technique for transfer function specification in direct volume rendering using real-time visual feedback [C] //Proceedings of SPIE. Bellingham: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 2002, 4681: 349-356
- [14] Lampe O D, Correa C, Ma K L, *et al.* Curve-centric volume reformation for comparative visualization [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2009, 15(6): 1235-1242
- [15] Engel K, Kraus M, Ertl T. High-quality pre-integrated volume rendering using hardware-accelerated pixel shading [C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Workshop on Graphics hardware. New York: ACM Press, 2001: 9-16
- [16] Stegmaier S, Strengert M, Klein T, *et al.* A simple and flexible volume rendering framework for graphics-hardware-based raycasting [C] //Proceedings of the 4th International Workshop on Volume Graphics. Washington D C: IEEE Computer Society Press, 2005: 187-195
- [17] Roerdink J B T M, Meijster A. The watershed transform: definitions algorithms and parallelization strategies [J]. Fundamenta Informaticae, 2000, 41(1-2): 187-228
- [18] Elkan C. Using the triangle inequality to accelerate k -means [C] //Proceedings of the 20th International Conference on Machine Learning. Washington D C: AAAI Press, 2003: 147-153
- [19] Varma M, Garg R. Locally invariant fractal features for statistical texture classification [C] //Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Computer Vision. Washington D C: IEEE Computer Society Press, 2007: 1-8
- [20] Yang M Q, Peng Y H, Liu Y X. The algorithm and application of finite line integral transform [C] //Proceedings of IEEE International Symposium on Microwave, Antenna, Propagation and EMC Technologies for Wireless Communications. Washington D C: IEEE Computer Society Press, 2005: 411-414
- [21] Li Zongjian, Zeng Li. 3D-FLIT and its application to linear feature extraction of ICT cubic data [J]. Optics and Precision Engineering, 2009, 17(12): 3089-3095 (in Chinese)
(李宗剑, 曾理. 三维有限线积分变换及其在工业 CT 体数据线条特征提取中的应用[J]. 光学精密工程, 2009, 17(12): 3089-3095)
- [22] Sadjadi F A, Hall E L. Three-dimensional moment invariants [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1980, 2(2): 127-136
- [23] Yang L, Albrecht F, Taxt T. Fast computation of three-dimensional moments using a discrete divergence theorem and a generalization to higher dimensions [J]. Graphical Models and Image Processing, 1997, 59(2): 97-108

(上接第 77 页)

- [6] Yang X N. Normal based subdivision scheme for curve design [J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(3): 243-260
- [7] Deng Chongyang, Wang Guozhao. A convexity preserving subdivision scheme for curve interpolation [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(8): 1042-1046 (in Chinese)
(邓重阳, 汪国昭. 曲线插值的一种保凸细分方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(8): 1042-1046)
- [8] Beccari C, Casciola G, Romani L. A non-stationary uniform tension controlled interpolating 4-point scheme reproducing conics [J]. Computer Aided Geometric Design, 2007, 24(1): 1-9
- [9] Sabin M A, Dodgson N A. A circle-preserving variant of the four-point subdivision scheme [C] //Proceeding of Modern Methods in Mathematics. Brentwood: Nashboro Press, 2005: 275-286
- [10] Schneider R, Kobbelt L. Discrete fairing of curves and surfaces based on linear curvature distribution [C] //Proceedings of International Conference on Curves and Surfaces. Saint-Malo: Vanderbilt University Press, 1999, 1: 371-380
- [11] Kobbelt L. A variational approach to subdivision [J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(8): 743-761
- [12] Floater M S, Micchelli C A. Nonlinear stationary subdivision [M] //Varma A K. Approximation Theory: in Memory. New York: Morcel Dekker, 1998: 209-224

作者: 朱利丰, 汪国平, Zhu Lifeng, Wang Guoping
作者单位: 北京大学机器感知与智能教育部重点实验室, 北京, 100871; 北京大学计算机系图形与交互技术实验室, 北京, 100871
刊名: 计算机辅助设计与图形学学报 ISTIC EI PKU
英文刊名: JOURNAL OF COMPUTER-AIDED DESIGN & COMPUTER GRAPHICS
年, 卷(期): 2011, 23(1)

参考文献(12条)

1. Lane J M; Riesenfeld R F [A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces](#) 1980(01)
2. Dyn N; Levin D; Gregory J A [A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design](#) 1987(04)
3. Zorin D; Schr(o)der P [A unified framework for primal/dual quadrilateral subdivision schemes](#) 2001(05)
4. Oswald P; Schr(o)der P [Composite primal/dual \$\sqrt{3}\$ -subdivision schemes](#) 2003(03)
5. Augsdorfer, UH; Dodgson, NA; Sabin, MA [Variations on the four-point subdivision scheme](#) [外文期刊] 2010(1)
6. rang X N [Normal based subdivision scheme for curve design](#) 2006(03)
7. 邓重阳, 汪国昭 [曲线插值的一种保凸细分方法](#) [期刊论文] - 计算机辅助设计与图形学学报 2009(8)
8. Beccari, C; Casciola, G; Romani, L [A non-stationary uniform tension controlled interpolating 4-point scheme reproducing conics](#) [外文期刊] 2007(1)
9. Sabin M A; Dodgson N A [A circle-preserving variant of the four-point subdivision scheme](#) 2005
10. Schneider R; Kobbelt L [Discrete fairing of curves and surfaces based on linear curvature distribution](#) 1999
11. Kobbelt L [A variational approach to subdivision](#) 1996(08)
12. Floater M S; Micchelli C A [Nonlinear stationary subdivision](#) 1998

本文读者也读过(4条)

1. 王栋, 张曦, 李桂清, Wang Dong, Zhang Xi, Li Guiqing [混合细分曲线及其应用](#) [期刊论文] - 计算机辅助设计与图形学学报 2007, 19(3)
2. 罗胜, 龚振邦, 马光, LUO Sheng, GONG Zhenbang, MA Guang [多视重建的研究现状](#) [期刊论文] - 机器人 2010, 32(5)
3. 李广鑫, 吴自力, 丁振国, 周利华, LI Guang-xin, WU Zi-li, DING Zhen-guo, ZHOU Li-hua [一种新的基于散列特征点的地形生成方法](#) [期刊论文] - 西安电子科技大学学报 (自然科学版) 2006, 33(4)
4. LI Qing-zhong, 高秀荣, LI Qing-zhong, GAO Xiu-rong [三维可控真实感地形生成方法研究](#) [期刊论文] - 系统仿真学报 2008, 20(11)

引用本文格式: 朱利丰, 汪国平, Zhu Lifeng, Wang Guoping [一类全局的曲线细分](#) [期刊论文] - 计算机辅助设计与图形学学报 2011(1)